ÉCOLE NAVALE

Première composition de mathématiques

Durée : 4 heures

"log" désigne le logarithme népérien usuel

I

Les arguments de convergence uniforme et les propriétés des intégrales dépendant d'un paramètre devront impérativement être présentés (en cas d'usage) avec le plus grand soin.

1° Soit f une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ à valeurs complexes et vérifiant $f(0) = f(2\pi)$.

a. Rappeler la formule de Parseval exprimant $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$.

b. Donner (sans démonstration) une condition suffisante portant sur f pour que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $[0, 2\pi]$.

2° *a.* Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes. Soient m et p deux entiers naturels. Donner une expression simple de $\sum_{k=m}^{m+p} a_k\, b_k$ en fonction des termes b_n et $A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

b. Rappeler l'énoncé du critère de convergence de Cauchy pour la série $\sum_{n\geq 0} a_n\, b_n$.

3° *a.* Déterminer l'ensemble des $t \in [0, 2\pi]$ tels que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nt)}{\log^2(2+n)}$ soit convergente. (On utilisera le 2°.)
On note $l(t)$ sa somme en cas de convergence.

b. Étudier la continuité, sur l'ouvert $]0, 2\pi[$, de la fonction $t \mapsto l(t)$.

c. Pour chaque $p \in \mathbb{Z}$ étudier la convergence de la série $\sum_{\substack{n\geq 0 \\ n\neq p}} \frac{1}{n-p} \times \frac{1}{\log^2(2+n)}$.

d. La fonction $t \mapsto l(t)$ est-elle continue en 0 et en 2π ?

Maintenant on désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble suivant :

$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, x \mapsto x^p\, g^{(q)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}\}$.

4° Étudier l'appartenance à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des trois fonctions suivantes :

a. $t \mapsto e^{-t^2}$;

b. $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^4}$;

c. $t \mapsto t^2 \cdot e^{-|t|}$.

5° Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \cdot g(t)dt$ est une intégrale convergente. $\hat{g}$ définit-elle en général une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

6° *a.* Prouver que $u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \cdot e^{-t^2}\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie une équation différentielle du premier ordre (que l'on précisera).

b. Calculer $u(0)$. (Pour chaque $R > 0$ on considérera l'intégrale double $\iint_{D(0,R)} e^{-x^2-y^2}\, dxdy$ où D(O, R) est le disque de $\mathbb{C}$ de centre O et de rayon R).

c. Donner une expression simple de $u(x)$.

7° Soit g une fonction appartenant à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

a. Prouver que, pour tout réel x, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x + 2n\pi)$ est absolument convergente. On note $h(x)$ sa somme.

b. Étudier avec soin :

i] les propriétés de périodicité et de continuité de h ;

ii] les propriétés de différentiabilité de h.

8° Prouver qu'il existe une constante C (que l'on précisera) telle que pour toute fonction g appartenant à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ on ait :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi) = C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n)$$

où la fonction $\hat{g}$ a été introduite dans la question **5°**.

II

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, Id désigne la matrice identité. Si A est une matrice, on notera ${}^tA$ sa matrice transposée.

1° Rappeler (sans démonstration) une propriété importante (de réductibilité) des matrices carrées d'ordre n réelles symétriques.

2° On désigne pour B_1 la matrice suivante :

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

a. Étudier la réduction de B_1 (valeurs propres, vecteurs propres...)

b. Calculer B_1^p pour tout entier naturel p.

c. Existe-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ tel que B_1 représente dans la base canonique un endomorphisme auto-adjoint pour ce produit scalaire ?

3° On désigne par B_2 la matrice suivante :

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Mêmes questions *a.*, *b.*, *c.* pour B_2 (à la place de B_1).

d. Existe-t-il une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $(Id + A)^2 = Id + B_2$?

4° On considère la matrice (4, 4) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $Y \in \mathbb{C}^4$ un vecteur colonne.

Discuter l'existence et l'unicité de solution $X \in \mathbb{C}^4$ de l'équation $(M + i\,Id)\,X = Y$.

Dans la suite, on fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale quelconque (i.e. ${}^tAA = Id$).

5° Dans le cas particulier où n est impair, A admet-elle en général une valeur propre réelle ?

6° On suppose (dans cette question seulement) que A n'admet aucune valeur propre réelle.

a. Montrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathbb{C}^n \setminus 0$ tel que AX soit non nul et $\mathbb{C}$-colinéaire à X.

b. Montrer qu'il existe un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A.

7° A étant une matrice orthogonale quelconque montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit de la forme suivante (diagonale par blocs) :

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \begin{pmatrix} a_p & -b_p \\ b_p & a_p \end{pmatrix} & \\ & & & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ sont des réels vérifiant des conditions très simples que l'on précisera.

8° Déterminer l'ensemble des matrices orthogonales A telles que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

9° Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} A^k\right)_{N \geq 0}$ et donner une interprétation géométrique remarquable de la limite en cas de convergence.